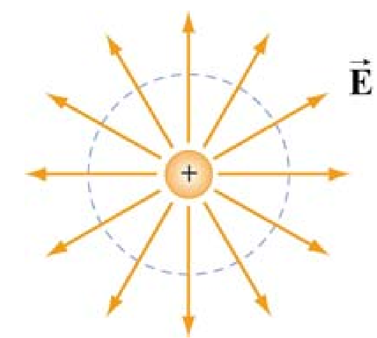
Aplicações da Lei de Gauss

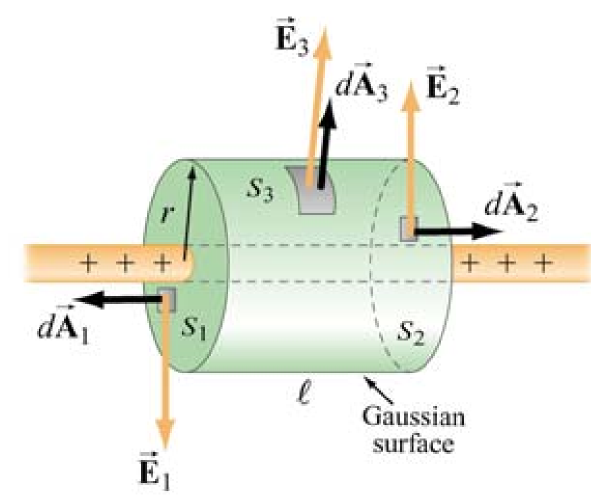
Cálculo do campo gerado por um fio infinito uniformemente carregado com densidade de carga λ

O problema apresenta simetria cilíndrica: o campo é **radial** e tem a mesma intensidade em pontos equidistantes do eixo do fio.

Fio visto de frente



Escolhemos uma superfície Gaussiana (fechada) cilindrica, de raio r e comprimento l, com eixo coincidente com o fio.



S_1 e S_2 são as tampas e S_3 é a superfície lateral

$$\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3}$$

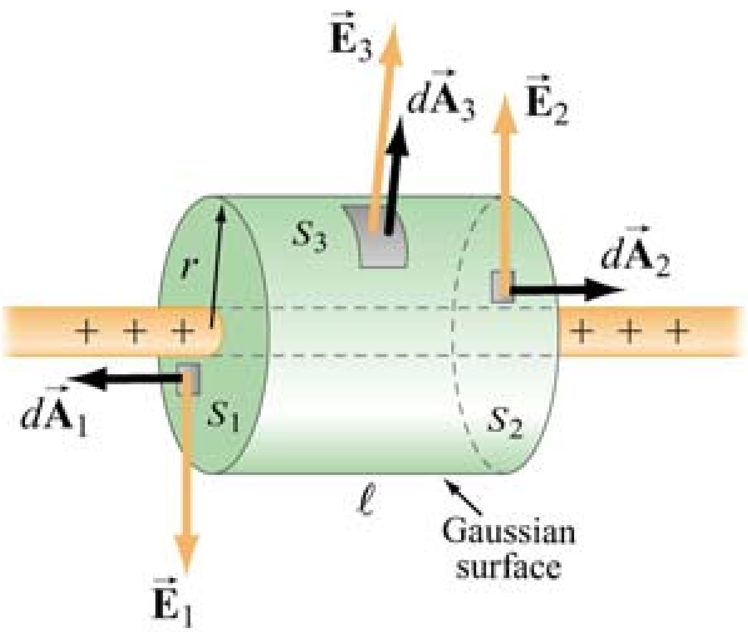
$$\phi_{S_1} = \phi_{S_2} = 0 \qquad \vec{E}_1 \perp d\vec{A}_1; \quad \vec{E}_2 \perp d\vec{A}_2$$

$$\phi_{S_3} = \int_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3 = \int_{S_3} E_3 \, dA_3 = E_3 \int_{S_3} dA_3 = E_3 \, A_3 = E_3 \, 2\pi r \ell$$

$\vec{E}_3 \parallel d\vec{A}_3$

E_3 não varia em módulo ao longo da superfície lateral

Campo gerado por um fio infinito uniformemente carregado com densidade de carga λ

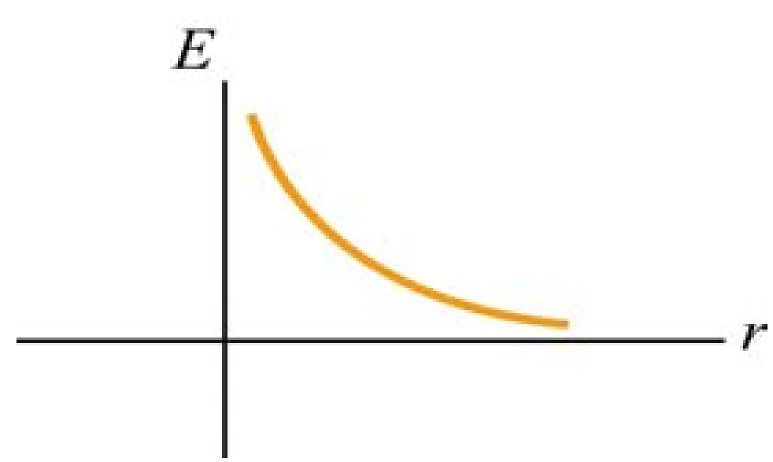


$$\phi = E_3\, 2\pi\, r\, \ell = \frac{q}{\epsilon_0}$$

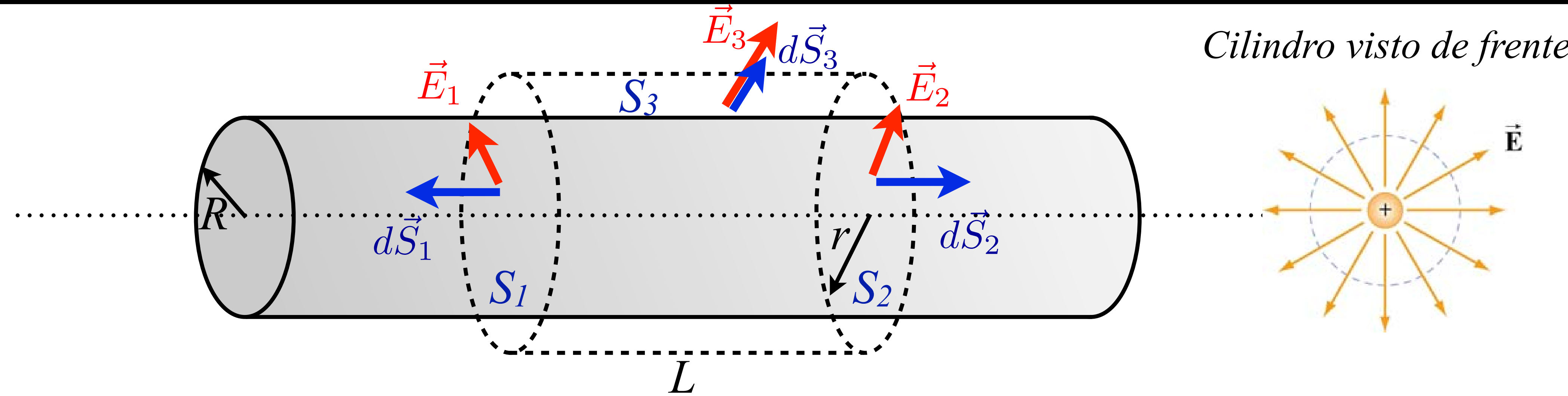
q é a carga envolvida pela superfície Gaussiana

$q = \lambda\ell$ - *onde* λ *é a densidade linear de carga no fio*

$$E_3\, 2\pi\, r\, \ell = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_3 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, r}}$$



Cálculo do campo gerado por um cilindro de raio R uniformemente carregada com densidade de carga ρ



*O problema apresenta simetria cilíndrica: o campo é **radial** e tem a mesma intensidade em pontos equidistantes do eixo do cilindro.*

Escolhemos uma superfície Gaussiana (fechada) cilíndrica, de raio r e comprimento L, com eixo coincidente com o eixo do cilindro.

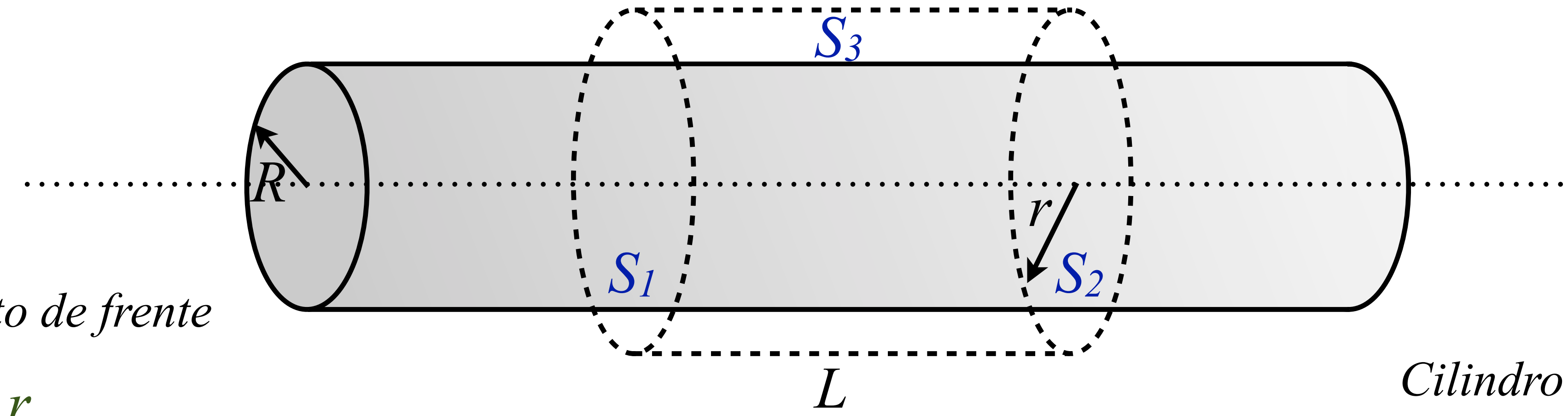
S_1 e S_2 são as tampas e S_3 é a superfície lateral

$$\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3}$$

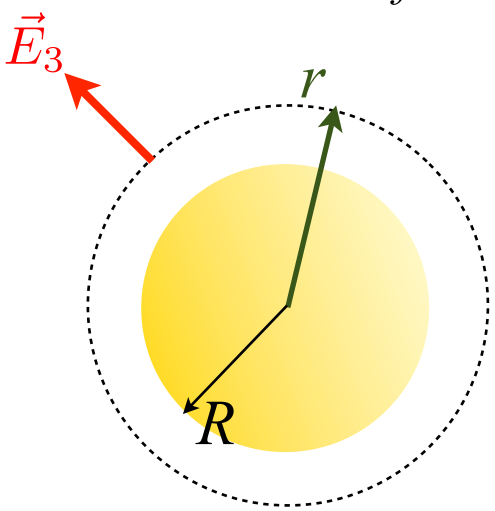
$$\phi_{S_1} = \phi_{S_2} = 0 \qquad E_1 \perp d\vec{S}_1; \quad E_2 \perp d\vec{S}_2$$

$$\phi_{S_3} = \int_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 = \int_{S_3} E_3\, dS_3 = E_3 \int_{S_3} dS_3 = E_3\, S_3 = E_3\, 2\pi r L$$

Cálculo do campo gerado por um cilindro de raio R uniformemente carregada com densidade de carga ρ



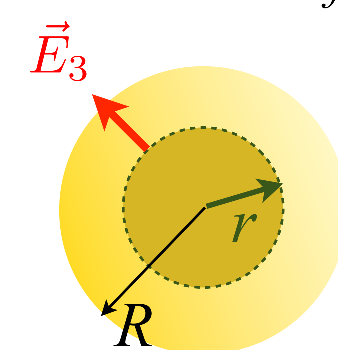
Cilindro visto de frente



$$\boxed{\phi = E_3\, 2\pi\, r\, L = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

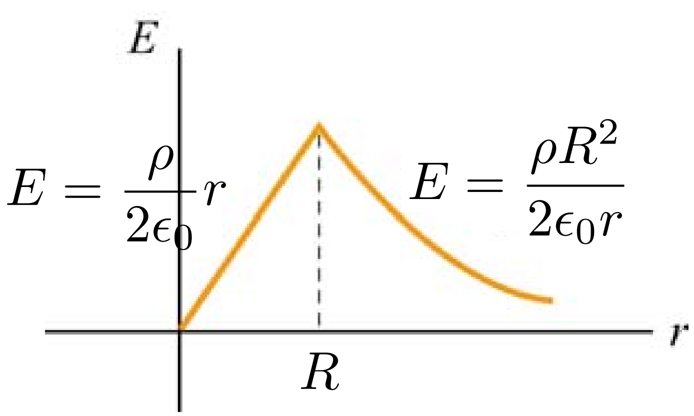
q é a carga envolvida pela superfície Gaussiana

Cilindro visto de frente



$r > R \qquad q = \rho\, \pi R^2\, L$

$r < R \qquad q = \rho\, \pi r^2\, L$

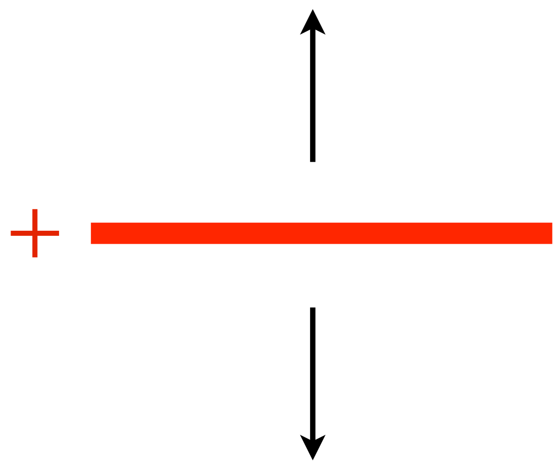


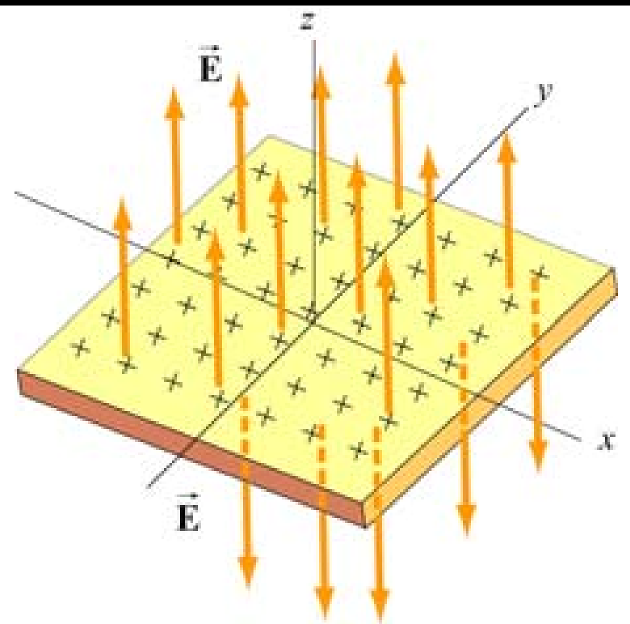
$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, r} \qquad (r > R)$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, R^2}\, r \qquad (r < R)$$

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{\rho\, \pi R^2\, L}{L} = \rho\, \pi R^2$$

Cáculo do campo gerado por um plano infinito uniformemente carregado com densidade de carga σ



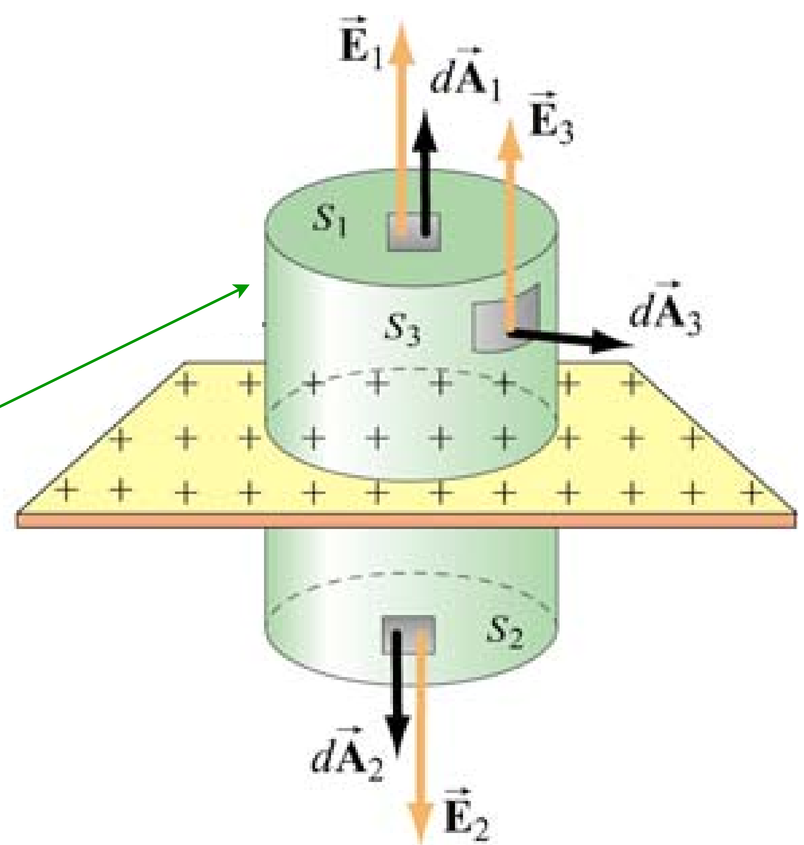


1. O problema apresenta simetria planar

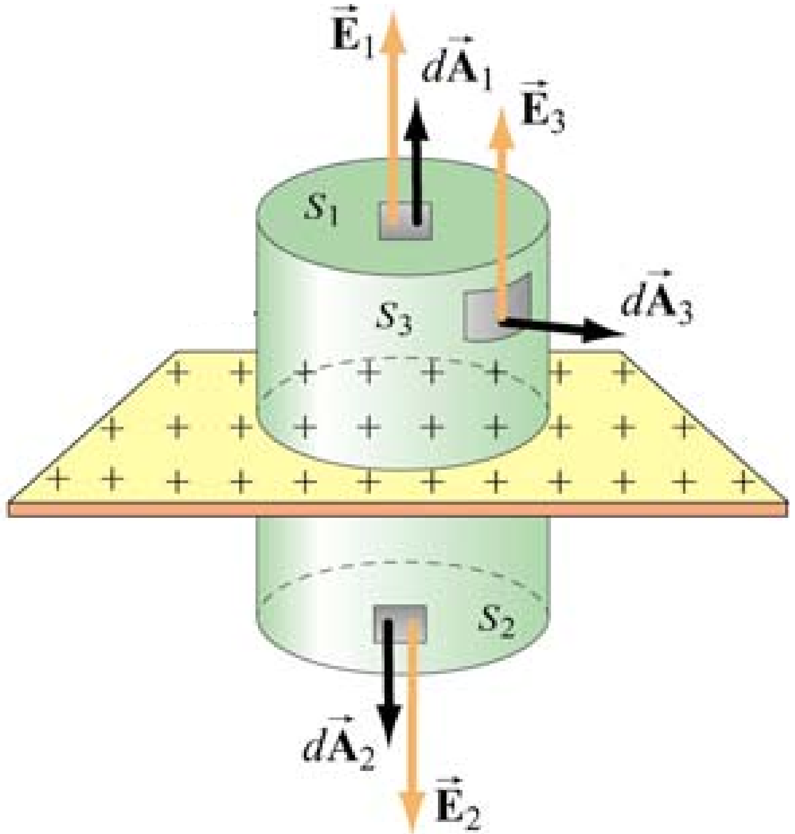
2. O campo elétrico deve ser perpendicular ao plano

3. Tem a mesma intensidade em pontos equidistantes do plano

Superfície Gaussiana apropriada



Cáculo do campo gerado por um plano infinito uniformemente carregado com densidade de carga $\boldsymbol{\sigma}$



$$\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3}$$

$$\phi_{S_3} = 0 \quad \left(\vec{E}_3 \perp d\vec{A}_3\right)$$

As superfícies S_1 e S_2 são equidistantes do plano

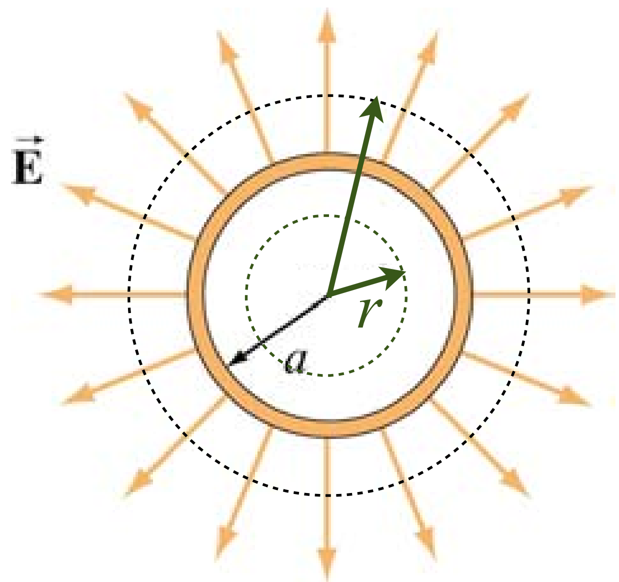
$$\phi_{S_1} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \int_{S_1} E_1\, dA_1 = E_1 \int_{S_1} dA_1 = E_1\, A_1 = E_1\, \pi r^2$$

$\vec{E}_1 \parallel d\vec{A}_1$ *E_1 não varia em módulo ao longo da superfície S_1*

Analogamente, $\phi_{S_2} = E_2\, \pi r^2$. Como $E_1 = E_2 = E$ $\quad \phi = 2E\, \pi r^2$

$$q = \sigma\, \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad 2E\, \pi r^2 = \frac{\sigma\, \pi r^2}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Cáculo do campo gerado por uma superfície esférica de raio a uniformemente carregada com carga Q



1. O problema apresenta simetria esférica

2. O campo elétrico é radial

3. Tem a mesma intensidade em pontos equidistantes do centro da esfera

Escolhemos superfícies Gaussianas esféricas, de raio r centrada no centro da casca.

$$\phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E\, dS = E \int_S dS = E\, 4\pi r^2$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$

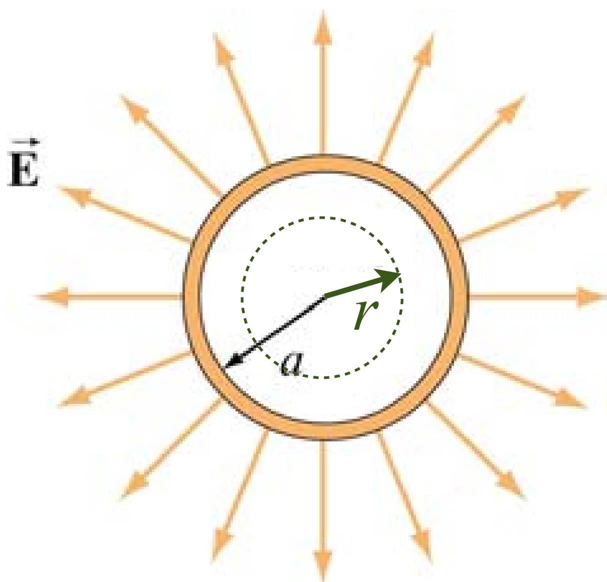
E não varia em módulo ao longo da superfície S

Isto é válido para superfícies Gaussianas com raios r maiores ou menores do que a

Cáculo do campo gerado por uma superfície esférica de raio a uniformemente carregada com carga Q

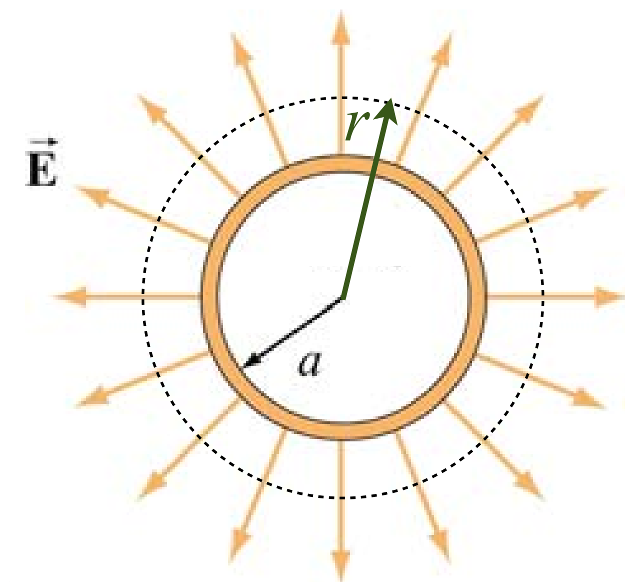
$$\phi_S = E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$ - *carga envolvida pela superfície Gaussiana*

(a) $r < a$



$$q = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

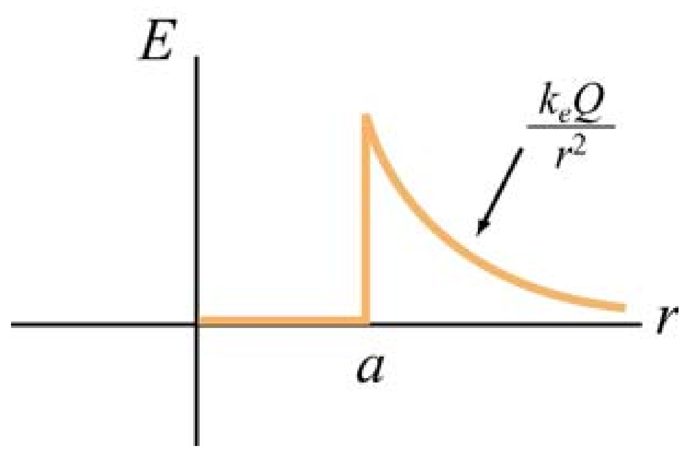
(b) $r > a$



carga da casca

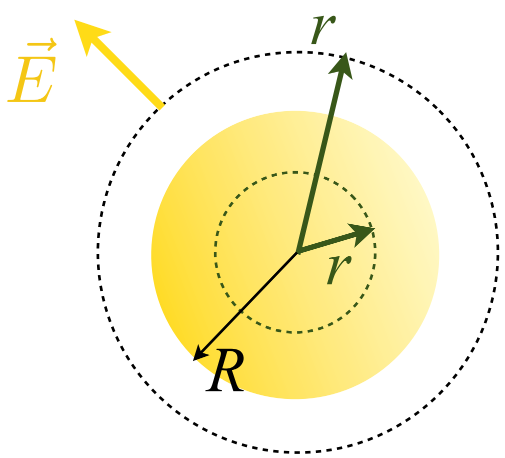
$$q = Q \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$

O campo é descontínuo em r =a



Para r >a é como se toda a carga da casca estivesse no centro da casca.

Cálculo do campo gerado por uma esfera de raio R uniformemente carregada com carga Q



1. O problema apresenta simetria esférica

2. O campo elétrico é radial

3. Tem a mesma intensidade em pontos equidistantes do centro da esfera

Escolhemos superfícies Gaussianas esféricas, de raio r centrada no centro da casca.

$$\phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \, dS = E \int_S dS = E \, 4\pi r^2$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$

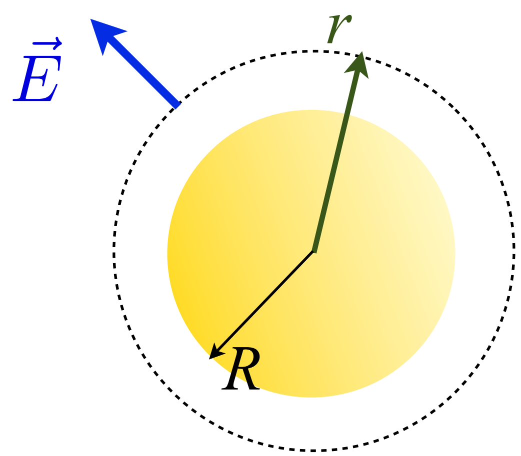
E não varia em módulo ao longo da superfície S

Isto é válido para superfícies Gaussianas com raios r maiores ou menores do que R

Cálculo do campo gerado por uma esfera de raio *R* uniformemente carregada com carga *Q*

$$\boxed{\phi_S = E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}}$$ ← *carga envolvida pela superfície Gaussiana*

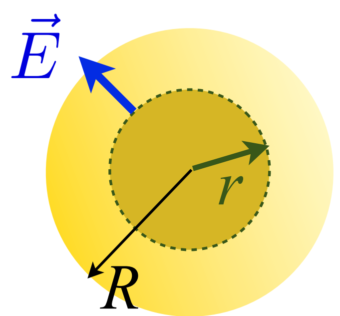
(a) $r > R$



carga da esfera

$$q = Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \qquad (r > R)$$

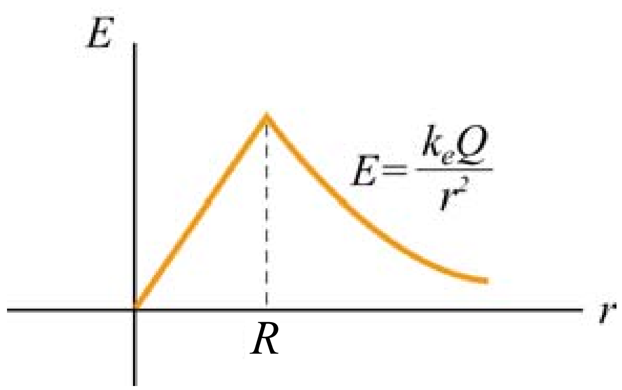
(b) $r < R$



$$q = \rho V_{SG}\,; \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,; \quad V_{SG} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad q = Q\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\,\frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) r} \qquad (\,r < R\,)$$

O campo é contínuo em r =R



Para r >R é como se toda a carga da esfera estivesse no centro da esfera.

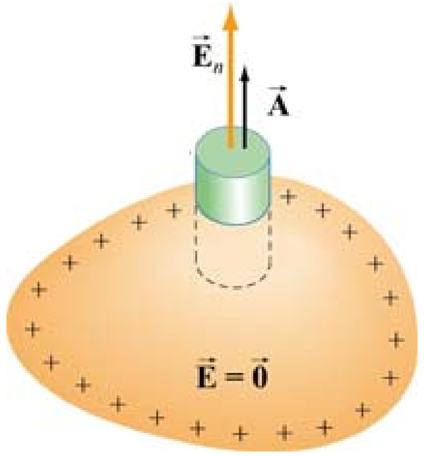
Campo elétrico nas vizinhanças da superfície de um condutor carregado

1. O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é nulo.

2. O excesso de carga no condutor vai para a sua superfície.

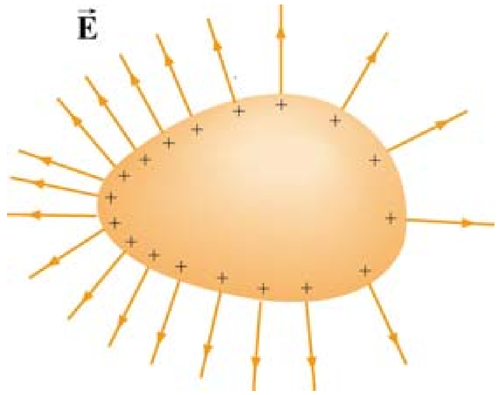
3. A componente tangencial do campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático é nula.

Consequentemente, o campo elétrico gerado por um condutor carregado deve ser perpendicular à sua superfície em pontos próximos a ela.



$$E_t = 0\,; \quad E_n \neq 0$$

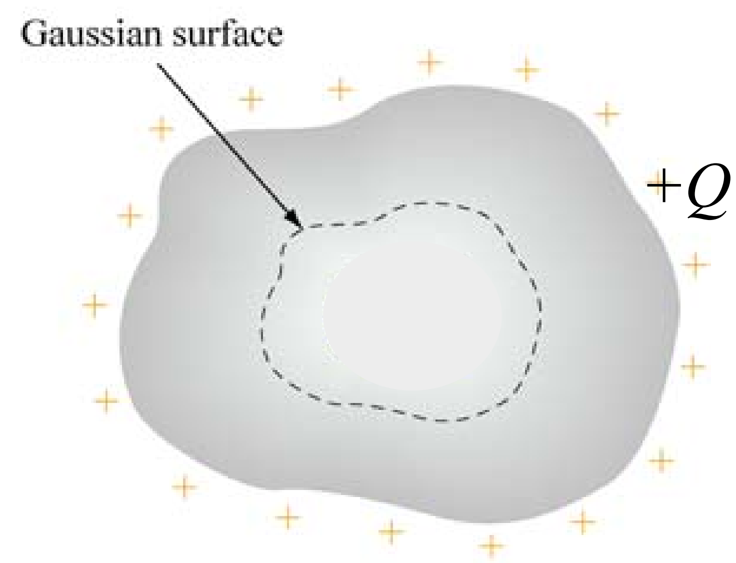
Usando a Lei de Gauss, é fácil mostrar que nas vizinhanças de um condutor carregado



$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

densidade superficial de carga no condutor

Condutor carregado com uma carga Q

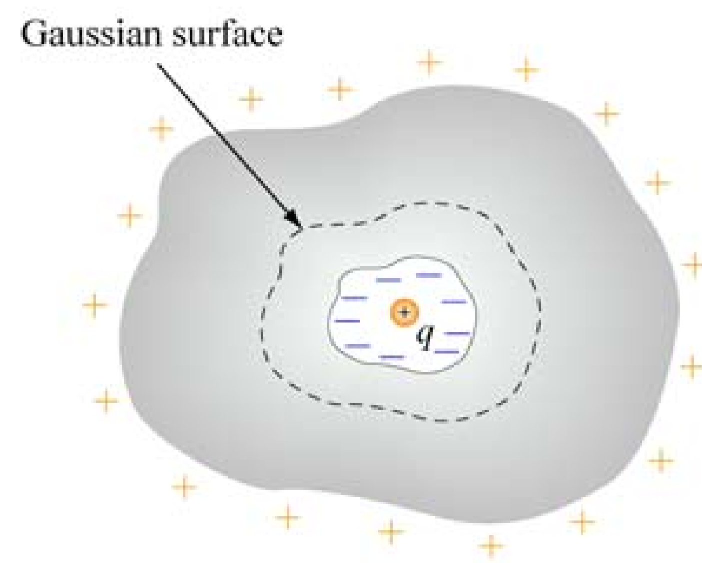


A carga $+Q$ redistribui-se no condutor.

No equilíbrio eletrostático:

O excesso de carga +Q flui para a superfície do condutor (Φ_{SG}=0 pois E=0 no interior de um condutor ideal no equilíbrio eletrostático $\Rightarrow q_{\text{envolvida pela SG}} = 0$)

Condutor carregado com uma carga Q, contendo uma carga q em uma cavidade no seu interior



Ocorre uma redistribuição de cargas no condutor.

No equilíbrio eletrostático:

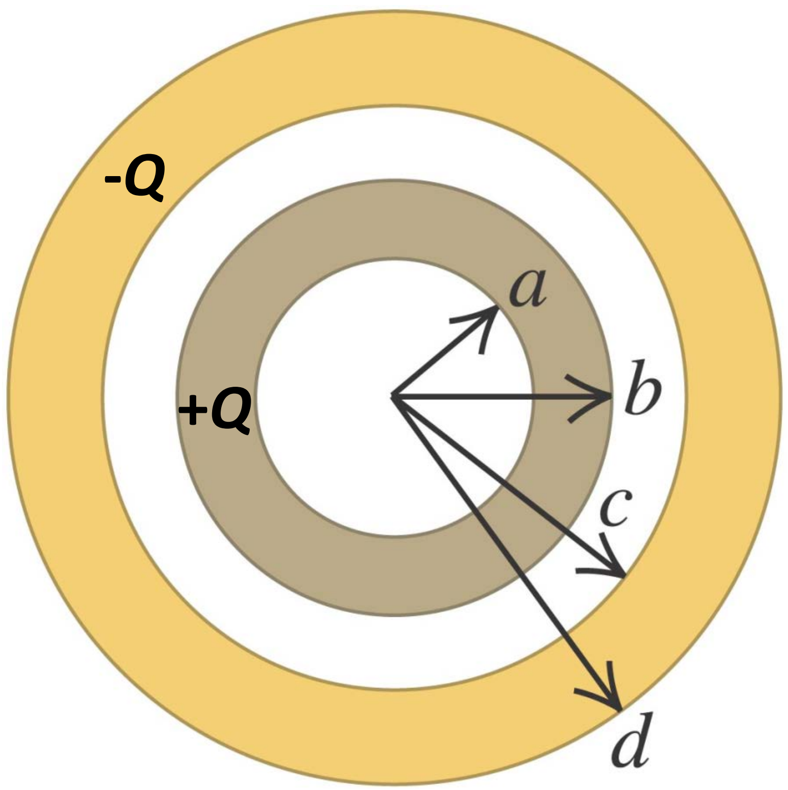
E=0 no interior do condutor

1. Flui uma carga -q para a superfície da cavidade ($\Phi_{SG}=0 \Rightarrow q_{\text{envolvida pela SG}} = 0$)

2. A superfície externa do condutor fica com carga Q+q (conservação de carga)

Exercício

Considere o campo elétrico gerado por duas cascas esféricas condutoras concêntricas com cargas $+Q$ e -Q. No equilíbrio eletrostático calcule:



1. $E(r < a)$
2. $\sigma(r = a)$
3. $E(a < r < b)$
4. $\sigma(r = b)$
5. $E(b < r < c)$
6. $\sigma(r = c)$
7. $E(c < r < d)$
8. $\sigma(r = d)$
9. $E(r > d)$

Exercício

Calcule o campo elétrico em todo o espaço gerado por:

(a) Esfera condutora de raio R com carga $+Q$